JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 19, 51–60 (1977)

Gewisse rationale Tschebyscheff-Approximationen in der komplexen Ebene

VOLKER KLOTZ

Institut für Angewandte Mathematik der Universität, 852 Erlangen, Germany

Communicated by G. Meinardus

Received September 3, 1975

Zusammenfassung: Es sei $H(B_E)$ die Klasse der auf der abgeschlossenen Einheitskreis-Scheibe B_E stetigen und im Innern des Einheitskreises E holomorphen Funktionen f. Im folgenden wird ein hinreichendes Kriterium für rationale Minimallösungen an Funktionen $f \in H(B_E)$ angegeben und gezeigt, daß unter einer zusätzlichen Voraussetzung die so charakterisierte Minimallösung eindeutig ist. Schließlich werden explizit rationale Minimallösungen an Funktionen f aus $H(B_E)$ angegeben, die dem hinreichenden Kriterium und der zusätzlichen Forderung genügen.

Es sei $B_E = \{z; |z| \leqslant 1\}$ die abgeschlossene Einheitskreis-Scheibe und $H(B_E)$ die Menge der Funktionen f, die holomorph im Innern von B_E und stetig auf $E := \operatorname{rd} B_E$ sind. In $H(B_E)$ betrachten wir die Tschebyscheff-Norm

$$\|f\|_{B_E} = \max_{z \in B_E} |f(z)|.$$

Sei

$$W_m{}^n = \left\{w;\, w(z) = \frac{q_n(z)}{p_m(z)} = \frac{\sum_{j=0}^{n} \alpha_j z^j}{\sum_{j=0}^{m} \beta_j z^j},\ \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}, p_m(z) \neq 0 \text{ für } |z| \leqslant 1\right\},$$

so ist $W_m{}^n$ eine Teilmenge von $H(B_E)$. Zu vorgegebenem $f \in H(B_E)$, $f \notin W_m{}^n$, suchen wir ein $\tilde{w} \in W_m{}^n$ mit

$$\|f - \tilde{w}\|_{B_E} \leqslant \|f - w\|_{B_E}$$

für alle $w \in W_m{}^n$, also eine Minimallösung mit der Abweichung

$$\rho_{W_m{}^n}(f) = \inf_{w \in W_m{}^n} \|f - w\|_{B_E}.$$

Copyright © 1977 by Academic Press, Inc.
All rights of reproduction in any form reserved.

ISSN 0021-9045

Die Existenz mindestens eines solchen $\tilde{w}$ ist aber (siehe z.B. [11]) gesichert. Mit Hilfe des Maximumprinzips (siehe z.B. [2]) ist sofort die Folgerung zu ziehen:

Satz 1. *Es sei* $f \in H(B_E)$, $f \notin W_m{}^n$. *Ist* $\tilde{w} \in W_m{}^n$ *eine rationale Funktion bester Approximation an* f *auf* B_E *bezüglich* $W_m{}^n$, *so ist* $\tilde{w}$ *auch eine rationale Funktion bester Approximation an* f *auf* E *bezüglich* $W_m{}^n$, *und umgekehrt.*

Wir können also uns im folgenden zur Lösung unseres Problems darauf beschränken, zu vorgegebenem $f \in H(B_E)$ eine Minimallösung $\tilde{w} \in W_m{}^n$ auf E zu suchen. Dann gilt mit

$$M(w) = \{z; z \in E, |f(z) - w(z)| = \|f - w\|_E\},$$

der

Satz 2 (Meinardus [6]). *Es sei* $f \in H(B_E)$, $f \notin W_m{}^n$, *und* $\tilde{w} \in W_m{}^n$. *Gilt für jedes* $w \in W_m{}^n$ *die Ungleichung*

$$\min_{z \in M(\tilde{w})} \operatorname{Re}\{(\overline{f(z) - \tilde{w}(z)}) \cdot (w(z) - \tilde{w}(z))\} \leqslant 0,$$

dann ist $\tilde{w}$ *Minimallösung an* f *auf* B_E *bezüglich* $W_m{}^n$.

Zur Formulierung eines hinreichenden Kriteriums benötigen wir das

Lemma 1. *Es sei*

$$G(r) = r \cdot e^{i\theta},$$

θ *beliebig mit* $0 \leqslant \theta < \pi$, *aber fest, eine Gerade durch den Ursprung und* $w = q_n/p_m$ *eine rationale Funktion aus* $W_m{}^n$. *Durchläuft* z *die Werte des Einheitskreises* E, *sei also* $z = z(\phi) = e^{i\phi}$, $0 \leqslant \phi < 2\pi$, *dann besitzt*

$$H(\phi, r) = w(z(\phi)) - G(r),$$

maximal $2t$ *Nullstellen, wobei* $t = \max(m, n)$ *ist.*

Beweis. Wir machen die folgenden beiden Fallunterscheidungen:

(1) $w(z) \neq 0$ für alle $z \in E$:

Es ist

$$w(z) = \frac{q_n(z)}{p_m(z)} = \frac{q_n(z) \cdot \overline{p_m(z)}}{|p_m(z)|^2} = \frac{1}{|p_m(z)|^2} \cdot \sum_{j=0}^{t} (\gamma_j z^j + \tilde{\gamma}_j \bar{z}^j),$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $\gamma_j, \tilde{\gamma}_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \ldots, t$, und insbesondere für $z \in E$

$$w(z(\phi)) = \frac{1}{|p_m(z(\phi))|^2} \cdot \sum_{j=0}^{t} \{a_j \cos j\phi + \tilde{a}_j \sin j\phi + i \cdot (b_j \cos j\phi + \tilde{b}_j \sin j\phi)\},$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $a_j, \tilde{a}_j, b_j, \tilde{b}_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, t$. Mit

$$u(\phi) = \sum_{j=0}^{t} (a_j \cos j\phi + \tilde{a}_j \sin j\phi)$$

und

$$v(\phi) = \sum_{j=0}^{t} (b_j \cos j\phi + \tilde{b}_j \sin j\phi)$$

folgt

$$\begin{aligned} \arg\{w(z(\phi))\} &= \arg(u(\phi) + i \cdot v(\phi)\} \\ &= \arctan(v(\phi)/u(\phi)) \qquad \bmod \pi; \end{aligned}$$

denn $u(\phi)$ und $v(\phi)$ können auf Grund der Voraussetzung $w(z) \neq 0$ für $z \in E$ nicht gleichzeitig für $0 \leqslant \phi < 2\pi$ den Wert 0 besitzen.

Wir setzen o.B.d.A. $\theta = 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned} H(\phi, r) = 0 &\Leftrightarrow \arg\{w(z(\phi))\} = 0 \qquad \bmod \pi \\ &\Leftrightarrow \arctan \frac{v(\phi)}{u(\phi)} = 0 \qquad \bmod \pi \\ &\Leftrightarrow v(\phi) = 0. \end{aligned}$$

v besitzt aber als trigonometrische Summe in ϕ vom Grade t maximal $2t$ Nullstellen.

(2) Es existiert mindestens ein $\tilde{z} \in E$ mit $w(\tilde{z}) = 0$:

Wir setzen o.B.d.A. grad $q_n = n$ voraus. Weiter besitze q_n die Produktdarstellung

$$q_n(z) = \alpha \cdot (z - \zeta_1)^{k_1} \cdot (z - \zeta_2)^{k_2} \cdots (z - \zeta_s)^{k_s} \cdot \prod_{j=1}^{n-k} (z - \xi_j),$$

mit $|\zeta_j| = 1$ für $j = 1, 2, \ldots, s$, $|\xi_j| \neq 1$ für $j = 1, 2, \ldots, n - k$, $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = k$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha \neq 0$.

Dann kann q_n dargestellt werden als

$$q_n(z(\phi)) = \left(\sin \frac{\phi - \chi_1}{2}\right)^{k_1} \cdot \sin \left(\frac{\phi - \chi_2}{2}\right)^{k_2} \cdots \left(\sin \frac{\phi - \chi_s}{2}\right)^{k_s} \cdot T(\phi),$$

mit $\chi_j = \arg\{\zeta_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, s$, und

$$T(\phi) = (2i)^k \cdot \alpha \cdot \prod_{j=1}^{s} \exp\left(i \cdot \frac{k_j(\chi_j + \phi)}{2}\right) \cdot \prod_{j=1}^{n-k} (z(\phi) - \xi_j).$$

Somit folgt

$$w(z(\phi)) = \frac{1}{|p_m(z(\phi))|^2} \cdot \left(\sin \frac{\phi - \chi_1}{2}\right)^{k_1} \cdots \left(\sin \frac{\phi - \chi_s}{2}\right)^{k_s} \cdot T(\phi) \cdot \overline{p_m(z(\phi))},$$

mit $T(\phi) \neq 0$ und $\overline{p_m(z(\phi))} \neq 0$ für $0 \leqslant \phi < 2\pi$.

Wir machen die weiteren beiden Fallunterscheidungen:

(i) $r = 0$: Aus der obigen Darstellung für w folgt

$$H(\phi, r) = 0 \Leftrightarrow \left(\sin \frac{\phi - \chi_1}{2}\right)^{k_1} \cdots \left(\sin \frac{\phi - \chi_s}{2}\right)^{k_s} = 0$$

$$\Leftrightarrow \phi = \chi_j \mod 2\pi, \qquad j = 1, 2, \ldots, s.$$

Bei $\phi = \chi_j$ liegt also für $j = 1, 2, \ldots, s$, eine Nullstelle von $H(\phi, r)$.

(ii) $r \neq 0$: Es folgt

$$H(\phi, r) = 0 \Leftrightarrow \arg\{w(z(\phi))\} = \arg\{r \cdot e^{i\theta}\}$$

$$\Leftrightarrow \arg\{T(\phi) \cdot \overline{p_m(z(\phi))}\} = \theta \qquad \mod \pi.$$

$T \cdot \overline{p_m}$ kann aber mit eindeutig bestimmten $\delta_j \in \mathbb{C}$ dargestellt werden als

$$T(\phi) \cdot \overline{p_m(z(\phi))} = \sum_{j=0}^{\tilde{t}} \delta_j(\cos j\phi + i \cdot \sin j\phi),$$

mit $\tilde{t} = \max(n - (k/2), m - (k/2))$, falls k gerade, bzw. als

$$T(\phi) \cdot \overline{p_m(z(\phi))} = \sum_{j=0}^{\tilde{t}} \delta_j \left(\cos \frac{2j+1}{2} \phi + i \cdot \sin \frac{2j+1}{2} \phi\right)$$

mit $\tilde{t} = \max(n - ((k+1)/2), m - ((k+1)/2))$, falls k ungerade. Berücksichtigung der Beziehung, daß eine trigonometrische Summe der Form

$$S(\phi) = \sum_{j=0}^{n} \left(a_j \cos \frac{2j+1}{2} \phi + b_j \sin \frac{2j+1}{2} \phi\right), \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

maximal $2n + 1$ Nullstellen besitzt, führt bei analogem Vorgehen wie unter (1) zu der Folgerung, daß $H(\phi, r)$ für $r \neq 0$ maximal $2n - k$ Nullstellen besitzt.

Die Aussagen (i) und (ii) ergeben wiederum die Behauptung.
Wir formulieren nun das hinreichende Kriterium.

SATZ 3. *Es sei* $f \in H(B_E)$, $f \notin W_m{}^n$, *und* $\tilde{w} \in W_m{}^n$. *Existieren* $2t+2$ *Werte* ϕ_μ *mit*

$$0 \leqslant \phi_1 < \phi_2 < \cdots < \phi_{2t+2} < 2\pi,$$

wobei $t = \max(m+n, 2m)$ *sei, so daß*

$$|f(z(\phi_\mu)) - \tilde{w}(z(\phi_\mu))| = \|f - \tilde{w}\|_E, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, 2t+2,$$

und mod 2π

$$\arg\{f(z(\phi_\mu)) - \tilde{w}(z(\phi_\mu))\} - \arg\{f(z(\phi_{\mu-1})) - \tilde{w}(z(\phi_{\mu-1}))\} = \pi,$$
$$\mu = 2, 3, \ldots, 2t+2,$$

gilt, dann ist $\tilde{w}$ *Minimallösung an* f *aus* $W_m{}^n$ bzgl. B_E.

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, daß unter den angegebenen Voraussetzungen $\tilde{w}$ nicht Minimallösung aus $W_m{}^n$ an f bzgl. B_E ist. Dann existiert nach Satz 2 mindestens eine rationale Funktion $w \in W_m{}^n$ mit

$$\operatorname{Re}(\overline{f(z(\phi_\mu)) - \tilde{w}(z(\phi_\mu))})(w(z(\phi_\mu)) - \tilde{w}(z(\phi_\mu))) > 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots, 2t+2.$$

Setzen wir

$$\arg\{f(z(\phi_1)) - \tilde{w}(z(\phi_1))\} = \theta \qquad \mod 2\pi,$$

so muß–wiederum mod 2π—für $\mu = 1, 2, \ldots, t+1$ gelten

$$\theta - (\pi/2) < \arg\{w(z(\phi_{2\mu-1})) - \tilde{w}(z(\phi_{2\mu-1}))\} < \theta + (\pi/2)$$

und

$$\theta + (\pi/2) < \arg\{w(z(\phi_{2\mu})) - \tilde{w}(z(\phi_{2\mu}))\} < \theta + (3\pi/2).$$

Diese Bedingung kann aber $(w - \tilde{w})$ nur erfüllen, wenn $(w - \tilde{w})$ mindestens $2t+1$ Schnittpunkte mit der Geraden

$$G(r) = r \cdot \exp(i(\theta + (\pi/2))), \qquad -\infty \leqslant r \leqslant \infty,$$

besitzt (Berührungspunkte werden als Schnittpunkte gezählt). Es gilt aber

$$w - \tilde{w} = \frac{q_n}{p_m} - \frac{\tilde{q}_n}{\tilde{p}_m} = \frac{r_{m+n}}{s_{2m}}, \qquad \text{mit} \quad (r_{m+n}/s_{2m}) \in W_{2m}^{m+n}.$$

Somit besitzt $w - \tilde{w}$ nach Lemma 1 maximal $2t$ Schnittpunkte mit der Geraden $G(r)$. Hieraus folgt die Behauptung.

Eine gewisse Modifizierung dieses hinreichenden Kriteriums erreichen wir, wenn wir fordern, daß der Betrag der Fehlerfunktion konstant ist. Insbesondere zeigt sich, daß die so charakterisierte Minimallösung eindeutig ist.

SATZ 4. *Es sei* $f \in H(B_E)$, $f \notin W_m{}^n$. *Existiert eine rationale Funktion* $\tilde{w} \in W_m{}^n$, *so daß*

$$f - \tilde{w},$$

den Einheitskreis auf den $(m + n + 1)$*-mal durchlaufenen Kreis mit dem Radius* $r > 0$ *abbildet, dann ist* $\tilde{w}$ *Minimallösung an* f *aus* $W_m{}^n$ bzgl. B_E *mit der Minimalabweichung* r *und die Minimallösung ist eindeutig.*

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, daß $\tilde{w}$ nicht Minimallösung an f ist. Sei $w^* \in W_m{}^n$ Minimallösung an f aus $W_m{}^n$ bzgl. B_E, dann gilt für $z \in E$

$$| w^*(z) - f(z)| < |f(z) - \tilde{w}(z)| = \|f - \tilde{w}\|_E .$$

Auf Grund des Satzes von Rouchè (siehe z.B. [5]) folgt, daß die Funktion

$$(w^* - f) + (f - \tilde{w}) = w^* - \tilde{w}$$

dieselbe Anzahl von Nullstellen im Innern des Einheitskreises wie die Funktion $f - \tilde{w}$ besitzt. Nach dem Argumentprinzip (siehe z.B. [5]) besitzt aber $f - \tilde{w}$ genau $m + n + 1$ Nullstellen im Innern des Einheitskreises. Das ist aber ein Widerspruch, denn

$$w^* - \tilde{w} = \frac{q_n{}^*}{p_m{}^*} - \frac{\tilde{q}_n}{\tilde{p}_m} = \frac{q_n{}^* \cdot \tilde{p}_m - p_m{}^* \cdot \tilde{q}_n}{p_m{}^* \cdot \tilde{p}_m}$$

besitzt höchstens $m + n$ Nullstellen. Völlig analog ist die Eindeutigkeitsaussage zu zeigen.

Im folgenden geben wir explizit Minimallösungen aus $W_1{}^1$ bzgl. B_E an Funktionen aus einer gewissen Klasse R von rationalen Funktionen an. Hierbei sei R folgendermaßen definiert:

$R = \{r; r \in \tilde{R}, r$ genügt den Beziehungen (a), (b) und (c)$\}$ mit

$$\tilde{R} = \left\{\tilde{r}; \tilde{r}(z) = \frac{\alpha_1 z + \alpha_0}{(1 - \bar{\beta}_1 z)(1 - \bar{\beta}_2 z)}, \alpha_\mu, \beta_\nu \in \mathbb{C}, |\beta_\nu| < 1, |\beta_1 + \beta_2| < 1\right\},$$

und

$$\alpha_1 \cdot \{\beta_1\beta_2\overline{(\beta_1 + \beta_2)} - (\beta_1 + \beta_2)\} = \alpha_0 \cdot \{1 - |\beta_1\beta_2|^2\}, \tag{a}$$

$$|\beta_1 + \beta_2| \cdot |1 - \overline{\beta_1\beta_2}| > |\beta_1\beta_2| \cdot (1 - |\beta_1\beta_2|^2), \tag{b}$$

Der Nullpunkt liegt im Innern der Ellipse

$$\sigma(\phi) = -(\overline{\beta_1 + \beta_2}) + \exp(i \cdot (\theta/2))\{| \beta_1\beta_2 | \cdot \exp(i(\phi + (\theta/2))) + \exp(-i(\phi + (\theta/2)))\}, \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi,$$

mit $\theta = \arg\{\overline{\beta_1\beta_2}\}$ (also der Ellipse mit dem Mittelpunkt $-(\overline{\beta_1 + \beta_2})$, der großen Halbachse $1 + | \beta_1\beta_2 |$, der kleinen Halbachse $1 - | \beta_1\beta_2 |$ und dem Winkel $\theta/2$ zwischen großer Halbachse und x-Achse). (c)

(Eine hinreichende Bedingung für (c) ist beispielsweise $| \beta_1 + \beta_2 | + | \beta_1\beta_2 | < 1$.)

Dann gilt der

Satz 5. *Es sei* $r(z) = (\alpha_1 z + \alpha_0)/((1 - \bar\beta_1 z)(1 - \bar\beta_2 z)) \in R$. *Dann existiert eine eindeutig bestimmte rationale Funktion*

$$w(z) = (\gamma_1 z + \gamma_0)/(1 - \bar\delta \cdot z) \in W_1^1,$$

so daß die Beziehung

$$r(z) - w(z) = \xi \cdot \frac{(z - \beta_1)(z - \beta_2)(z - \delta)}{(1 - \bar\beta_1 z)(1 - \bar\beta_2 z)(1 - \bar\delta \cdot z)} \tag{d}$$

mit eindeutig bestimmtem $\xi \in \mathbb{C}$ *erfüllt ist und* w *ist Minimallösung an* r *auf* B_E bzgl. W_1^1 *mit*

$$\rho_{W_1^1}(r) = | \xi |.$$

Beweis. Es ist $r \in H(B_E)$. Somit fordern wir $w \in H(B_E)$, also $| \delta | < 1$, und können

$$u(z) := (1 - \bar\beta_1 z)(1 - \bar\beta_2 z)(1 - \bar\delta \cdot z) \neq 0$$

für $z \in E$ voraussetzen. Multiplizieren wir (d) mit $u(z)$, so führt Koeffizientenvergleich zu dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \overline{\beta_1\beta_2}\gamma_1 - \xi &= 0, \\ -(\overline{\beta_1 + \beta_2})\,\gamma_1 + \overline{\beta_1\beta_2}\gamma_0 - \alpha_1\bar\delta + (\beta_1 + \beta_2)\xi + \delta\xi &= 0, \\ \gamma_1 - (\overline{\beta_1 + \beta_2})\,\gamma_0 - \alpha_0\bar\delta - \beta_1\beta_2\xi - (\beta_1 + \beta_2)\,\delta\xi + \alpha_1 &= 0, \\ \gamma_0 + \beta_1\beta_2\delta\xi + \alpha_0 &= 0. \end{aligned} \tag{e}$$

Setzen wir

$$v_1(\delta) = \overline{\beta_1\beta_2}(\beta_1 + \beta_2) - (\overline{\beta_1 + \beta_2}) + \overline{\beta_1\beta_2}(1 - | \beta_1\beta_2 |^2) \cdot \delta$$

und

$$v_2(\delta) = 1 - | \beta_1\beta_2 |^2 + \overline{\beta_1\beta_2}\{\beta_1\beta_2(\overline{\beta_1 + \beta_2}) - (\beta_1 + \beta_2)\} \cdot \delta,$$

wobei auf Grund unserer Forderung $|\delta| < 1$ und der Bedingung (b) sofort $v_1(\delta) \neq 0$ und $v_2(\delta) \neq 0$ folgt, so führt (e) zu

$$\frac{\alpha_1\bar{\delta} + \overline{\beta_1\beta_2} \cdot \alpha_0}{v_1(\delta)} = \frac{\alpha_0\bar{\delta} - (\overline{\beta_1 + \beta_2}) \cdot \alpha_0 - \alpha_1}{v_2(\delta)},$$

und weiter zu

$$\begin{aligned} 0 = \overline{\beta_1\beta_2} \cdot \{&\alpha_1[\beta_1\beta_2(\overline{\beta_1 + \beta_2}) - (\beta_1 + \beta_2)] - \alpha_0[1 - |\beta_1\beta_2|^2]\} \cdot \delta\bar{\delta} \\ &+ \overline{\beta_1\beta_2} \cdot \{\alpha_0[(\overline{\beta_1 + \beta_2}) - \overline{\beta_1\beta_2}(\beta_1 + \beta_2)] + \alpha_1[1 - |\beta_1\beta_2|^2]\} \cdot \delta \\ &+ \{\alpha_0[(\overline{\beta_1 + \beta_2}) - \overline{\beta_1\beta_2}(\beta_1 + \beta_2)] + \alpha_1[1 - |\beta_1\beta_2|^2]\} \cdot \bar{\delta} \\ &+ \overline{\beta_1\beta_2} \cdot \alpha_0(1 - |\beta_1\beta_2|^2) + [(\overline{\beta_1 + \beta_2})\, \alpha_0 + \alpha_1] \\ &\cdot [\overline{\beta_1\beta_2}(\beta_1 + \beta_2) - (\overline{\beta_1 + \beta_2})] \end{aligned}$$

und bei Berücksichtigung von Bedingung (a) schließlich zu

$$\zeta \cdot \{\overline{\beta_1\beta_2} \cdot \delta + \bar{\delta} - (\overline{\beta_1 + \beta_2})\} = 0$$

mit

$$\zeta = \alpha_0 \cdot \{(\overline{\beta_1 + \beta_2}) - \overline{\beta_1\beta_2}(\beta_1 + \beta_2)\} + \alpha_1 \cdot (1 - |\beta_1\beta_2|^2),$$

und somit zu

$$\overline{\beta_1\beta_2} \cdot \delta + \bar{\delta} - (\overline{\beta_1 + \beta_2}) = 0, \tag{f}$$

da wegen Bedingung (a) und (b), $\zeta \neq 0$ ist. Wir setzen

$$\sigma(\delta) = \overline{\beta_1\beta_2} \cdot \delta + \bar{\delta} - (\overline{\beta_1 + \beta_2})$$

und $\delta = r \cdot e^{i\cdot\phi}$, $0 < r < 1$, $0 \leqslant \phi < 2\pi$. Lassen wir nun δ einen Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius r durchlaufen, so beschreibt

$$\begin{aligned} \sigma(\delta) = \sigma(r, \phi) &= \overline{\beta_1\beta_2} \cdot r \cdot e^{i\cdot\phi} + r \cdot e^{-i\cdot\phi} - (\overline{\beta_1 + \beta_2}) \\ &= r \cdot \exp(i \cdot (\theta/2))\{|\beta_1\beta_2| \cdot \exp(i(\phi + (\theta/2))) + \exp(-i(\phi + (\theta/2)))\} \\ &\quad - (\overline{\beta_1 + \beta_2}), \end{aligned}$$

wobei $\theta = \arg\{\overline{\beta_1\beta_2}\}$ ist, eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $-(\overline{\beta_1 + \beta_2})$, der großen Halbachse $r(1 + |\beta_1\beta_2|)$, der kleinen Halbachse $r(1 - |\beta_1\beta_2|)$ und dem Winkel $\theta/2$ zwischen großer Halbachse und x-Achse.

Wegen Bedingung (b) gilt weiter

$$\beta_1 \neq \beta_2, \qquad \text{also} \qquad \overline{(\beta_1 + \beta_2)} \neq 0.$$

Somit folgt schließlich aus Bedingung (c), daß ein $\delta \in \mathbb{C}$ mit $|\delta| < 1$ existiert, das der Beziehung (f) genügt. Da

$$r(z) - w(z) = \xi \cdot \frac{(z - \beta_1)(z - \beta_2)(z - \delta)}{(1 - \bar{\beta}_1 z)(1 - \bar{\beta}_2 z)(1 - \bar{\delta} z)}$$

den Einheitskreis E auf den dreimal durchlaufenen Einheitskreis abbildet, folgt bei Berücksichtigung der Beziehung

$$|r(z) - w(z)| = |\xi| \qquad \text{für alle} \quad z \in E$$

die zweite Aussage auf Grund des Satzes 4.

Hierzu betrachten wir das

BEISPIEL 1. Wir setzen

$$\beta_1 = (1 - i)/(2)^{3/2}, \qquad \beta_2 = (1 + i)/(2)^{3/2},$$

und mit beliebigem $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha_1 = -(9/4) \cdot \alpha$, $\alpha_0 = \alpha$. Dann ist

$$\tilde{r}(z) = \frac{(-(9/4)z + 1) \cdot \alpha}{(1 - ((1 + i)z)/(2)^{3/2}(1 - ((1 - i)z)/(2)^{3/2}} \in R,$$

und die rationale Funktion $\tilde{w} \in W_1^1$ bester Approximation an $\tilde{r}$ auf B_E bzgl. W_1^1 ergibt sich zu

$$\tilde{w}(z) = \frac{-(16/7) \cdot \alpha \cdot z - (64/63) \cdot \alpha}{1 - (4/9) \cdot z}.$$

Wegen $\xi = (2/7) \cdot \alpha$ folgt schließlich $\rho_{W_1^1}(\tilde{r}) = (2/7) \cdot |\alpha|$.

Diese Arbeit ist ein Teil der Dissertation, die der Verfasser am Institut für Angewandte Mathematik I der Universität Erlangen Nürnberg bei Prof. Dr. G. Meinardus angefertigt hat.

LITERATUR

1. S. JA. AL'PER, Asymptotic values of best approximation of analytic functions in a complex domain, *Uspehi Mat. Nauk.* **14** (1959), 131–134.
2. H. CARTAN, "Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer oder mehrerer komplexen Veränderlichen," BI-Hochschultaschenbücher 112/112a, Mannheim, 1966.

3. E. W. CHENEY, "Introduction to Approximation Theory," McGraw–Hill, New York, 1966.
4. G. G. LORENTZ, "Approximation of Functions," Holt–Rinehart–Winston, New York, 1966.
5. M. MARDEN, "Geometry of Polynomials," Amer. Math. Soc., Providence, *R. I.*, 1966.
6. G. MEINARDUS, "Approximation of Functions: Theory and Numerical Methods," Springer–Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1967.
7. S. J. POREDA, Estimates for best approximation to rational functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **159** (1970), 129–135.
8. S. J. POREDA, On the behavior of best uniform deviations, *J. Approximation Theory* **6** (1972), 387–390.
9. T. J. RIVLIN, Some explicit polynomial approximations in the complex domain, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 467–469.
10. T. J. RIVLIN AND B. WEISS, Some best polynomial approximations in the plane, *Duke Math. J.* **35** (1968), 475–482.
11. J. L. WALSH, "Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain," Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 20, Providence, *Amer. Math. Soc. R. I.*, 1965.